

Corrente alternada



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/>

Oscilações forçadas (RLC com fem)

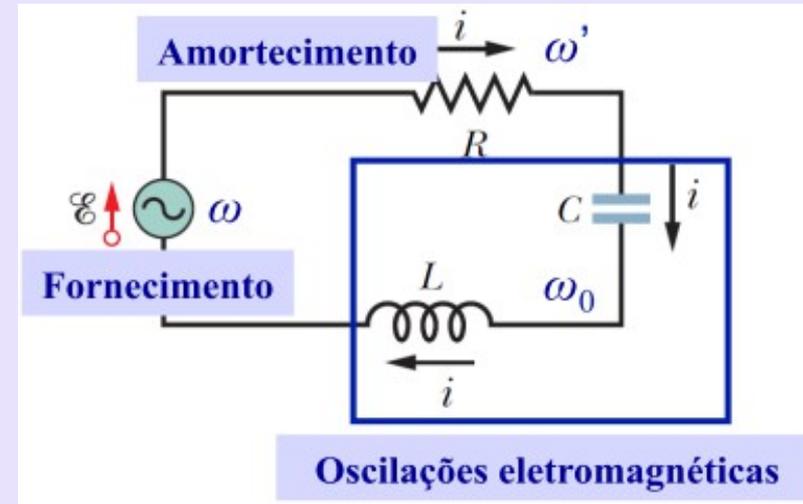
As oscilações de um circuito RLC não serão totalmente amortecidas se um dispositivo de *fem* externo fornecer energia suficiente para compensar a energia térmica dissipada no resistor.

Normalmente, este dispositivo é um gerador de tensão alternada com fem do tipo:

$$\varepsilon = \varepsilon_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t$$

As oscilações de $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$ são *oscilações forçadas*. Veremos que, qualquer que seja a frequência angular natural ω_0 de um circuito, estas oscilações ocorrem sempre na *frequência angular propulsora* ω . Mostramos aqui a solução para a corrente:

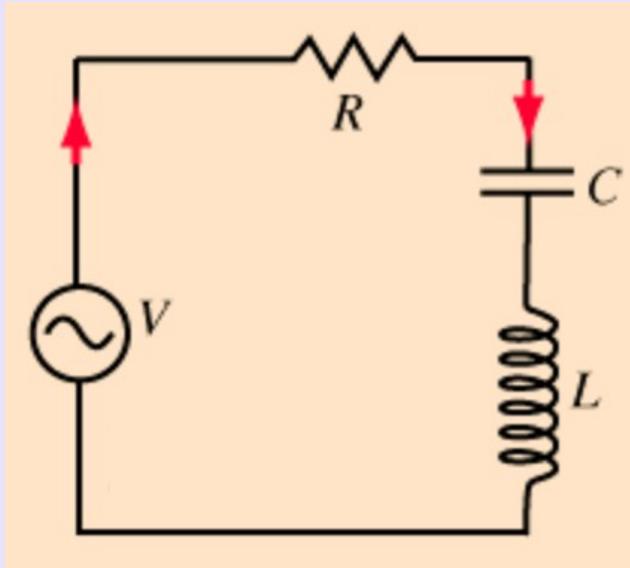
$$i = i_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$



Oscilações forçadas (RLC com fem)

“A corrente alternada em todos os pontos do circuito de corrente alternada em série, tem a mesma amplitude e a mesma fase.”

⇒ A voltagem em cada componente terá amplitude e fases diferentes.



$$\Delta v_L + \Delta v_R + \Delta v_C = \Delta v_\varepsilon$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t$$



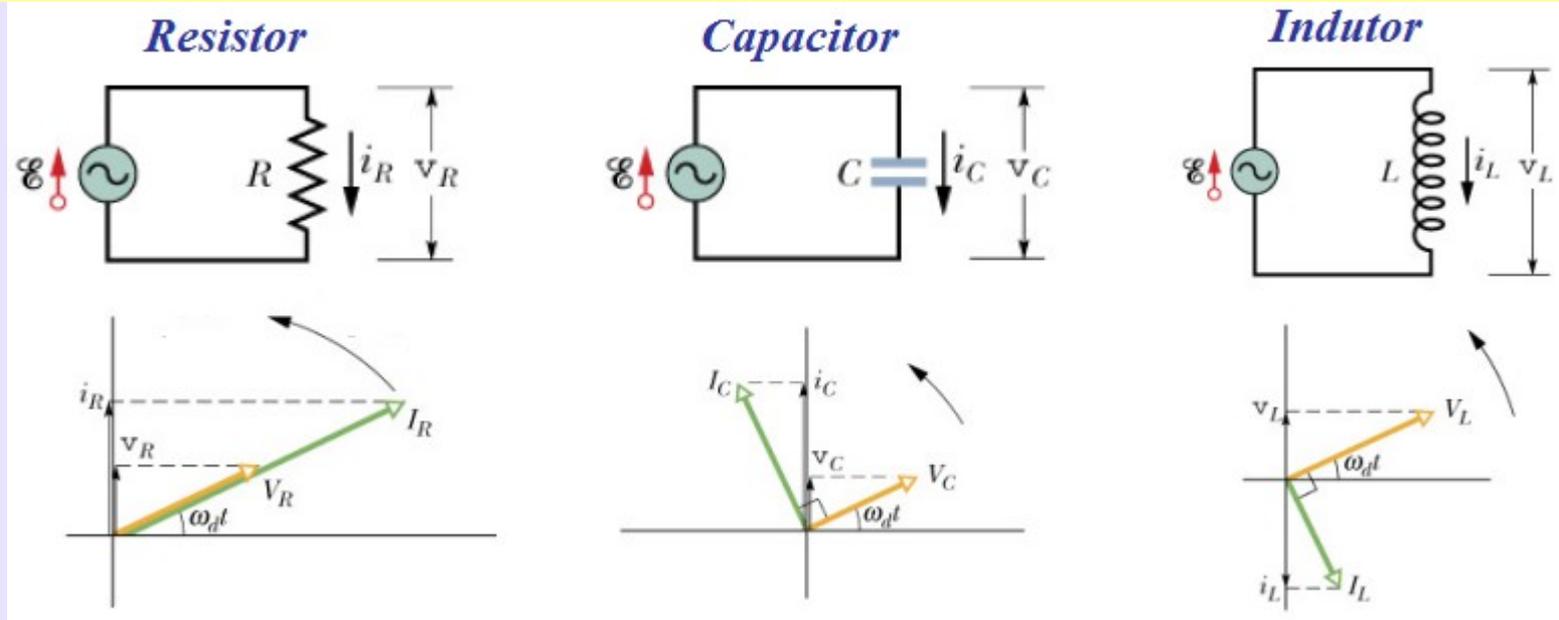
eq. diferencial que descreve o circuito

$$\Rightarrow i(t) = i_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t - \varphi) \Rightarrow \begin{cases} i_{m\acute{a}x} \rightarrow \text{corrente m\acute{a}xima} \\ \varphi \rightarrow \hat{\text{a}}\text{ngulo de fase entre} \\ \text{a corrente e a voltagem} \end{cases}$$

Objetivo ⇒ determinar $i_{m\acute{a}x}$ e φ



Revisão: Três circuitos simples



$$i_R = I_R \text{ sen}(\omega t)$$

$$V_R = I_R R$$

$$\varphi = 0$$

$\Rightarrow i$ em fase

$$v_R = V_R \text{ sen} \omega t$$

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \text{ sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$V_C = I_C X_C$$

$$\varphi = -\pi/2$$

$\Rightarrow i$ adiantada

$$v_C = V_C \text{ sen}(\omega t - \pi/2)$$

$$i_L = \frac{V_L}{X_L} \text{ sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$V_L = I_L X_L$$

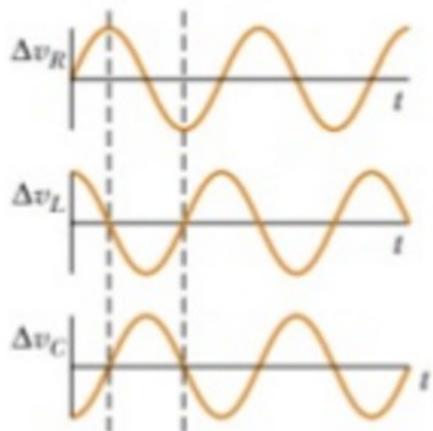
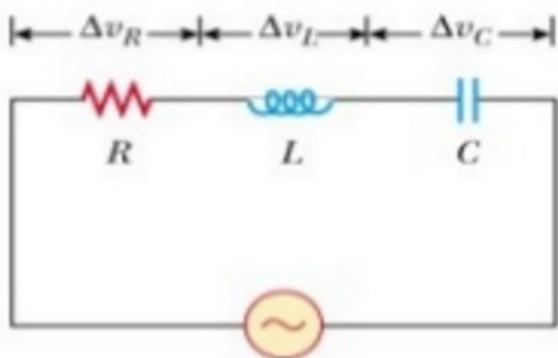
$$\varphi = +\pi/2$$

$\Rightarrow i$ atrasada

$$v_L = V_L \text{ sen}(\omega t + \pi/2)$$



O Circuito RLC Série

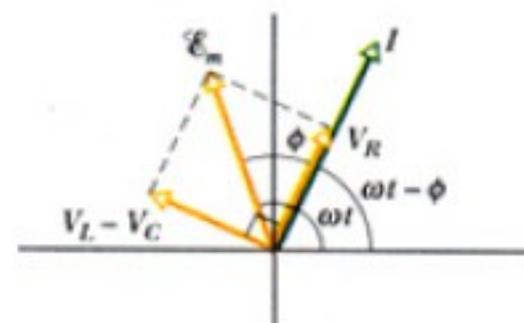
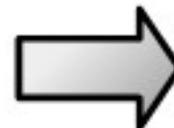
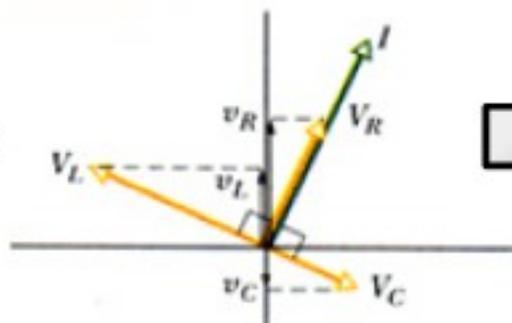
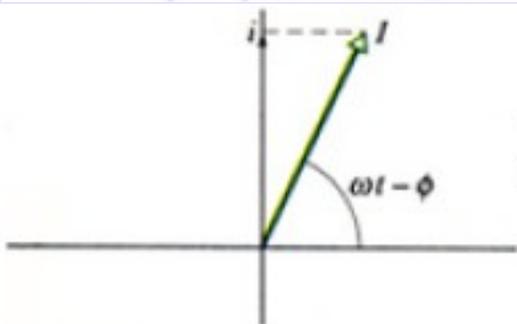


$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_{máx} \text{ sen } \omega t \rightarrow \text{fem aplicada} \\ i(t) = i_{máx} \text{ sen } (\omega t - \varphi) \rightarrow \text{corrente permanente} \end{cases}$$

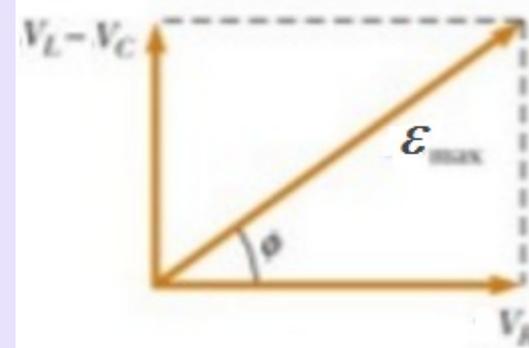
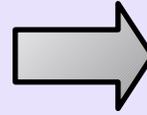
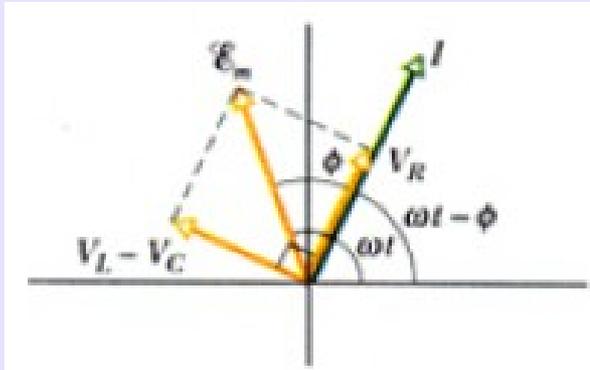
Devemos determinar $i_{máx}$ e φ em função das grandezas R , L , C , $\varepsilon_{máx}$ e ω .

A corrente i tem o mesmo valor em todos os elementos e é representada por um **único fasor** (vetor girante) no diagrama. Para qualquer tempo : $\varepsilon = v_R + v_L + v_C$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_{máx} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$$



O Circuito RLC Série



supondo que : $V_L > V_C$

do triângulo de fasores $\Rightarrow (\epsilon_{m\acute{a}x})^2 = (V_R)^2 + (V_L - V_C)^2$

$$\epsilon_{m\acute{a}x} = \sqrt{(i_{m\acute{a}x}R)^2 + (i_{m\acute{a}x}X_L - i_{m\acute{a}x}X_C)^2}$$

$$\epsilon_{m\acute{a}x} = i_{m\acute{a}x} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\Rightarrow i_{m\acute{a}x} = \frac{\epsilon_{m\acute{a}x}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

 corrente máxima no circuito

onde $X_L = \omega L$ e $X_C = 1/\omega C$.



O Circuito RLC Série

$$\text{Fazendo : } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \rightarrow \text{impedância}$$

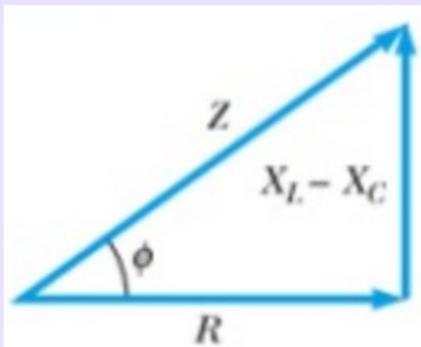
$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{máx}} = i_{\text{máx}} Z \quad [Z \rightarrow \text{Ohm}]$$

↳ Forma generalizada da lei de Ohm aplicada ao circuito AC

Obs: $i=i(R,L,C,\omega)$ a corrente depende da frequência ω .

Constante de fase:

Triângulo de impedância



$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

↳ relação de fase entre a corrente e a voltagem.



Constante de fase

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$$

Circuito indutivo

$X_L > X_C \Rightarrow \varphi > 0 \rightarrow$ A voltagem está adiantada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências altas. O circuito tem características indutivas.

Circuito capacitivo

$X_L < X_C \Rightarrow \varphi < 0 \rightarrow$ A voltagem está atrasada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências baixas. O circuito tem características capacitivas.

Circuito resistivo

$X_L = X_C \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Z = R \rightarrow$ A voltagem está em fase com a corrente. Ocorre para uma única frequência. O circuito tem características resistivas.

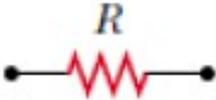
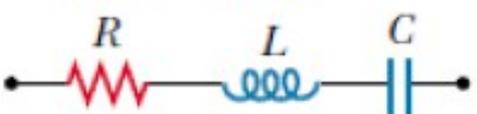
↳ A corrente toma o valor máximo.

$$\Rightarrow i_{máx} = \frac{\varepsilon_{máx}}{R}$$



Valores de impedância

TABELA: Impedância e ângulos de fase para várias combinações de elementos no circuito

Elemento	Impedância Z	Fase φ
	R	0°
	X_C	-90°
	X_L	$+90^\circ$
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negativa, entre -90° e 0°
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positiva, entre 0° e 90°
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negativa, se $X_C > X_L$ Positiva, se $X_C < X_L$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

Potência instantânea impressa ao circuito pelo gerador de AC

$$P = \varepsilon i = \varepsilon_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t \ i_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\Rightarrow P = \varepsilon i = \varepsilon_{m\acute{a}x} i_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$\text{fazendo } \rightarrow \text{sen}(\omega t - \varphi) = \text{sen}\omega t \cos\varphi - \text{sen}\varphi \cos\omega t$$

$$\Rightarrow P = \varepsilon_{m\acute{a}x} i_{m\acute{a}x} \text{sen}^2\omega t \cos\varphi - \varepsilon_{m\acute{a}x} i_{m\acute{a}x} \text{sen}\omega t \cos\omega t \text{sen}\varphi$$

Potência média da fonte

$i_{m\acute{a}x}$, $\varepsilon_{m\acute{a}x}$, φ e $\omega \rightarrow$ constantes no tempo

$$\Rightarrow \langle \text{sen}^2\omega t \rangle = \frac{1}{2}$$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

como $\langle \text{sen}\omega t \text{ cos}\omega t \rangle = \frac{1}{2} \text{sen}2\omega t$

$$\Rightarrow \langle \text{sen}\omega t \text{ cos}\omega t \rangle = 0$$

Logo

depende da fase entre a corrente e a voltagem

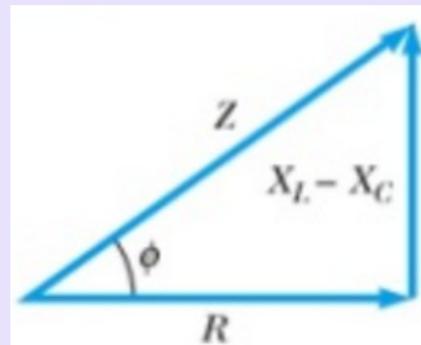
$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} i_{\text{máx}} \varepsilon_{\text{máx}} \text{cos}\varphi$$

ou

$$\langle P \rangle = i_{\text{rms}} \varepsilon_{\text{rms}} \text{cos}\varphi$$

$\text{cos}\varphi \rightarrow$ fator de potência

Triângulo de impedância



$$\Rightarrow \text{cos}\varphi = \frac{R}{Z}$$



Potência em Circuitos de Corrente Alternada

$$\Rightarrow \langle P \rangle = i_{rms} \varepsilon_{rms} \frac{R}{Z}$$

↳ Potência média proporcionada pelo gerador

$$\text{como } i_{rms} = \frac{\varepsilon_{rms}}{Z}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = i_{rms}^2 R$$

↳ Potência média dissipada por efeito joule no resistor

“Vemos que não há perda de potência no indutor ou no capacitor”

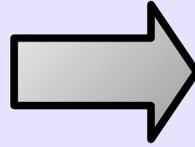


As reatâncias indutiva, X_L , e capacitiva, X_C , só modificam a fase, φ , o que provoca uma perda de potência no circuito.



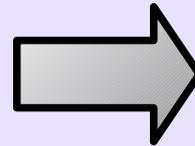
Ressonância no circuito RLC em série

O circuito RLC está em ressonância



A corrente do circuito toma o seu valor máximo

O valor para a corrente no circuito é dada pela lei de Ohm generalizada



$$i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{Z}$$

$$\Rightarrow i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Note que a impedância depende da frequência de oscilação, assim o valor da corrente também depende da frequência.

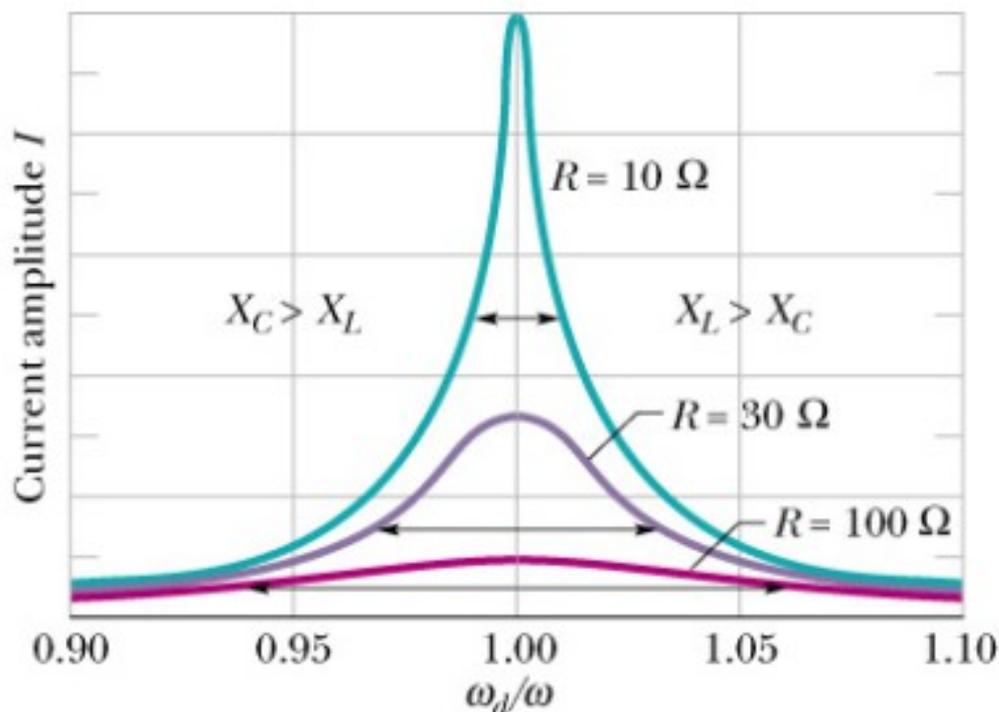
A corrente atinge o valor máximo quando: $\Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow Z = R$

$$\Rightarrow i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{R}$$

um circuito em ressonância apresenta o valor mínimo para a impedância



Ressonância no circuito RLC em série



Para que haja ressonância:

$$\Rightarrow X_L = X_C$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

↪ frequência de ressonância do circuito.

“A corrente em um circuito RLC em série atinge seu valor de pico quando a frequência ω da voltagem aplicada pelo gerador for igual à frequência natural ω_0 do circuito oscilador, que depende somente dos valores de L e C .”

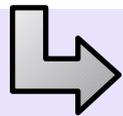
⇒ na ressonância, o valor da corrente é limitado só pela resistência do circuito.



Potência média em função da frequência

$$\langle P \rangle = i_{rms}^2 R = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{Z^2} R$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{máx}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$



Potência média no circuito RLC em série

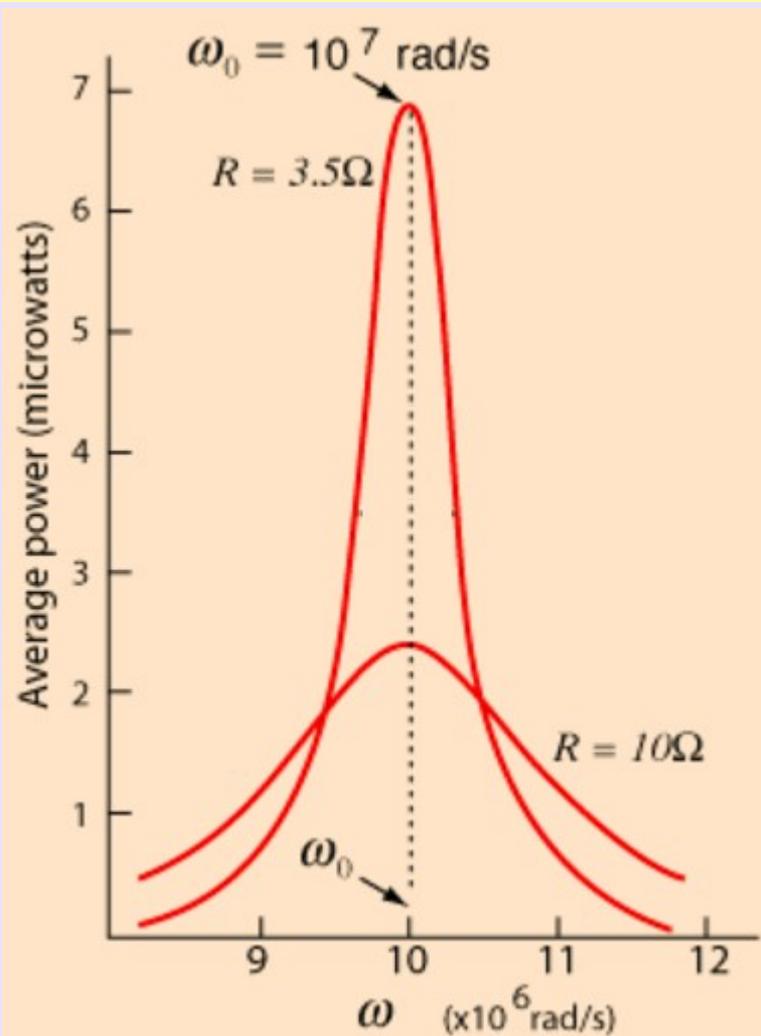
$$\text{como } X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} :$$

$$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = L^2 \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2$$

$$\Rightarrow (X_L - X_C)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$



Potência média em função da frequência



$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{máx}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

Como pode ser visto na figura ao lado, na ressonância, onde $\omega = \omega_0$, a potência média dissipada no resistor é máxima e toma o seguinte valor:

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{R}$$

Quando mudamos a impedância de um circuito para seu valor mínimo, ou seja, fazemos $X_L = X_C$, falamos que estamos casando a impedância.



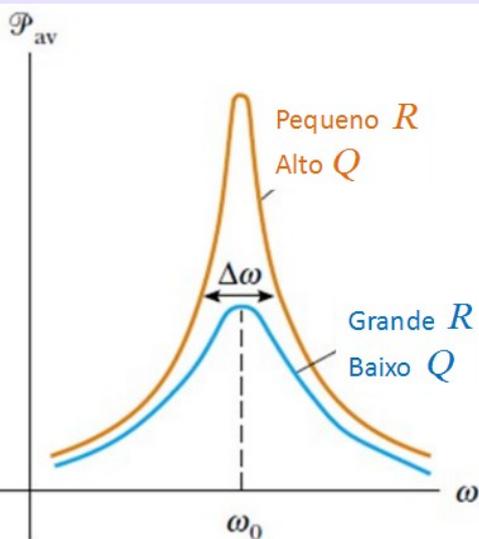
Fator de Qualidade

O fator de qualidade pode ser definido como:

$$Q = 2\pi \left\langle \frac{U_0(\text{energia armazenada})}{\Delta U(\text{energia perdida por ciclo})} \right\rangle_{\text{na ressonância}}$$

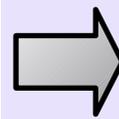
Energia armazenada em um ciclo $\Rightarrow U_0 = \frac{1}{2} L i_{\text{máx}}^2 = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}$

Energia dissipada $\Rightarrow \Delta U = \text{Potência} \times \text{Período} = \frac{1}{2} i_{\text{máx}}^2 R \times \frac{2\pi}{\omega_0}$



$$Q = 2\pi \frac{1}{2} L i_{\text{máx}}^2 \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{2}{i_{\text{máx}}^2 R}$$

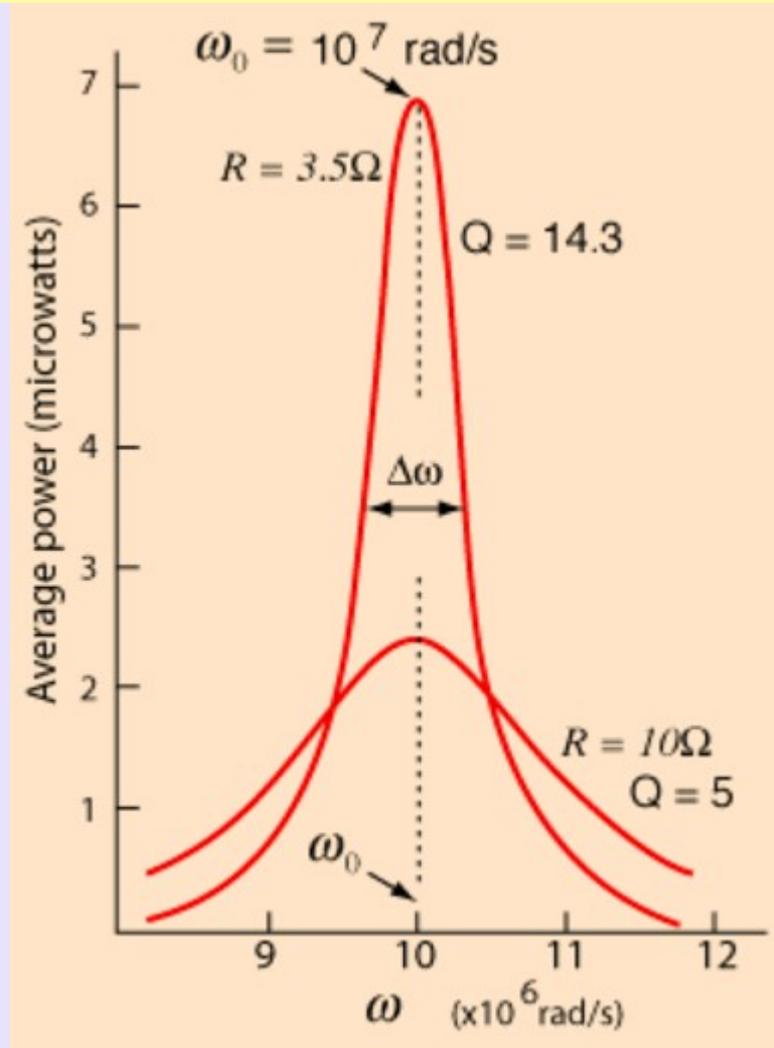
$$\Rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$



Mede o grau de seletividade de um circuito.



Fator de Qualidade



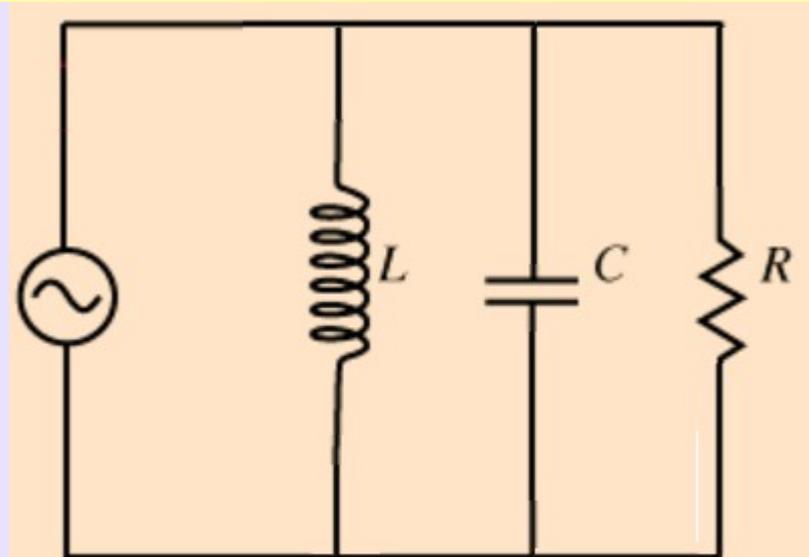
Como podemos ver na figura ao lado, quanto maior o valor do fator de qualidade de um circuito, maior é a potência transmitida. Na verdade o fator Q é uma medida do estreitamento da curva e pode ser aproximado por:

$$\Rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

O factor de qualidade elevado indica que o circuito é muito selectivo em torno da sua frequência de ressonância, enquanto que um factor de qualidade reduzido, indica que a largura de banda é bastante larga.



Circuito RLC em paralelo



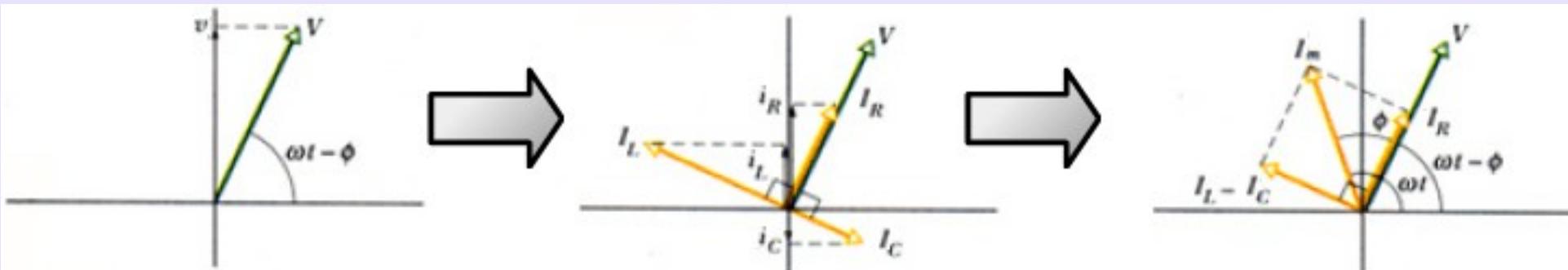
supondo que : $I_L > I_C$

$$\Rightarrow I_{m\acute{a}x} = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$$

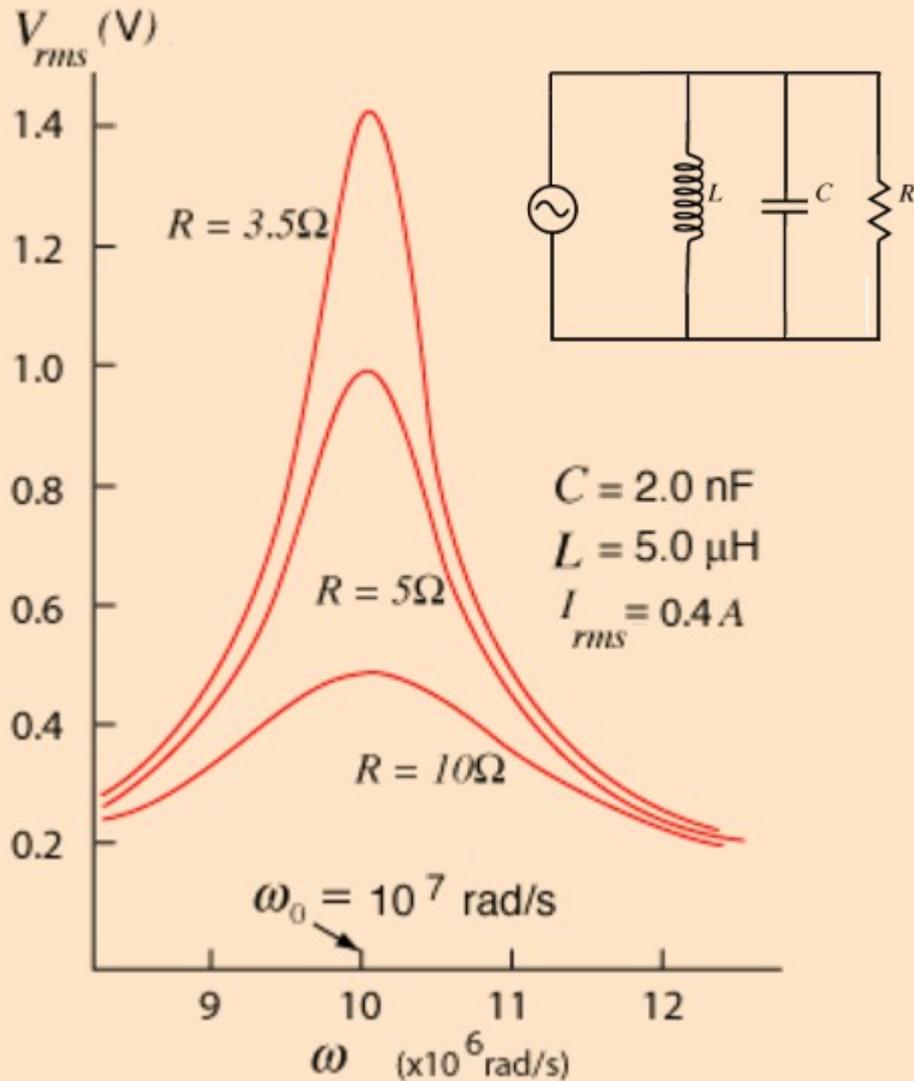
$$i_{rms} = \frac{\epsilon_{rms}}{Z}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$



Circuito RLC em paralelo



Na ressonância:

$$\Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow Z = R$$

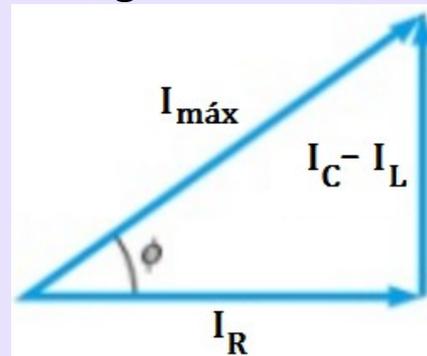
$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

frequência de ressonância do circuito.

$$\langle P \rangle = i_{rms} \varepsilon_{rms} \cos\varphi$$

$\cos\varphi \rightarrow$ fator de potência

Triângulo de fasores



$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{I_R}{I_{m\acute{a}x}}$$

$$= \frac{Z}{R}$$



Constante de fase

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{R}{X_L} - \frac{R}{X_C} \right)$$

Circuito indutivo

$X_L > X_C \Rightarrow \varphi < 0 \rightarrow$ A voltagem está adiantada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências baixas. O circuito tem características indutivas.

Circuito capacitivo

$X_L < X_C \Rightarrow \varphi > 0 \rightarrow$ A voltagem está atrasada de φ em relação a corrente. Ocorre para frequências altas. O circuito tem características capacitivas.

Circuito resistivo

$X_L = X_C \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Z = R \rightarrow$ A voltagem está em fase com a corrente. Ocorre para uma única frequência. O circuito tem características resistivas.

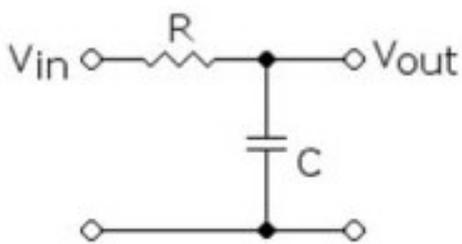
↳ A corrente toma o valor máximo.

$$\Rightarrow i_{máx} = \frac{\varepsilon_{máx}}{R}$$



Filtros capacitivos

Filtro passa-baixa



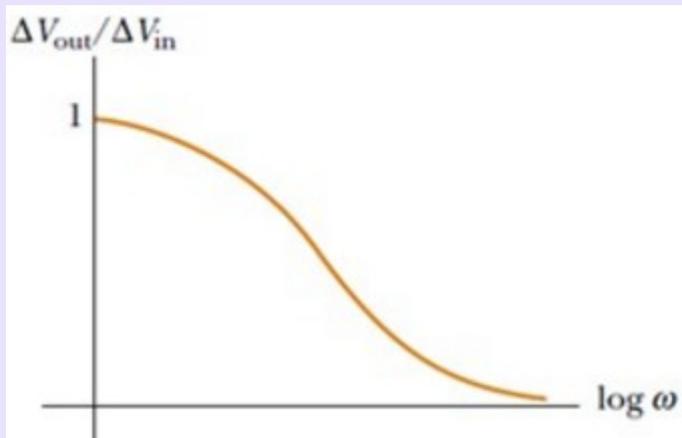
(a)

$$V_{in} = \frac{i_{rms}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

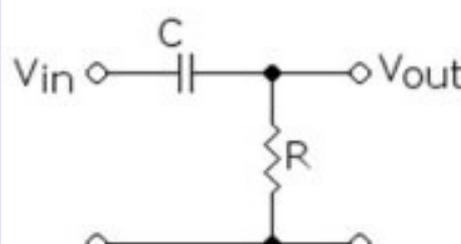
$$V_{out} = \frac{i_{rms}}{X_C}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_C^2}}{X_C}$$

$$V_{out} = \sqrt{1 + (\omega CR)^2} V_{in}$$



Filtro passa-alta



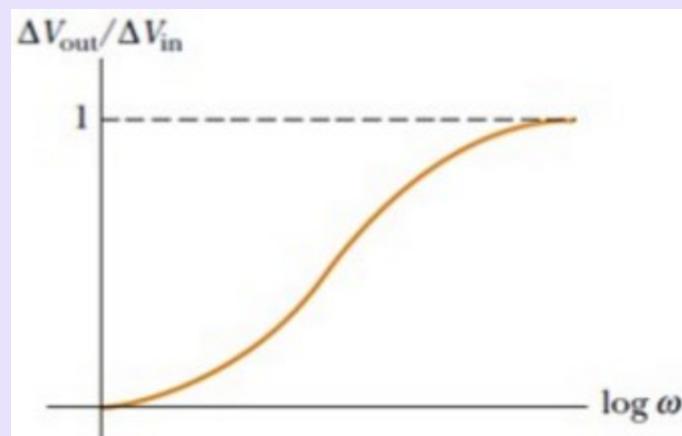
(b)

$$V_{in} = \frac{i_{rms}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$V_{out} = \frac{i_{rms}}{R}$$

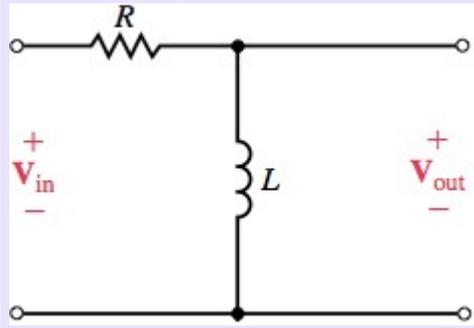
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_C^2}}{R}$$

$$V_{out} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2} V_{in}$$



Filtros Indutivos

Filtro passa-alta

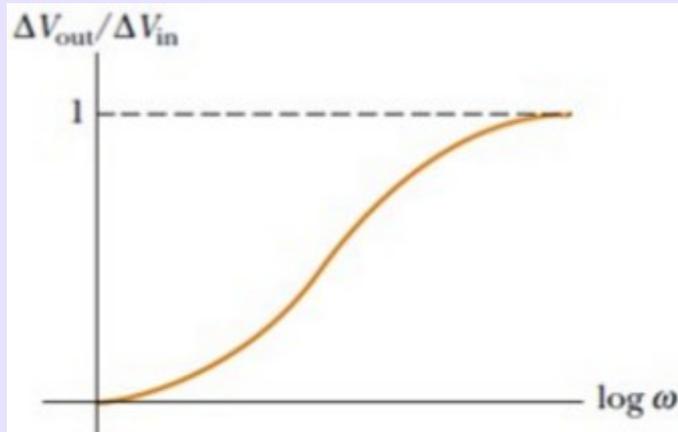


$$V_{in} = \frac{i_{rms}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

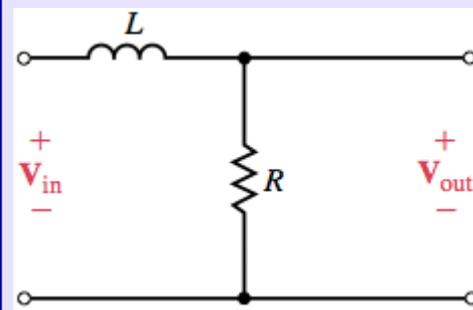
$$V_{in} = \frac{i_{rms}}{X_L}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_L}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}$$



Filtro passa-baixa

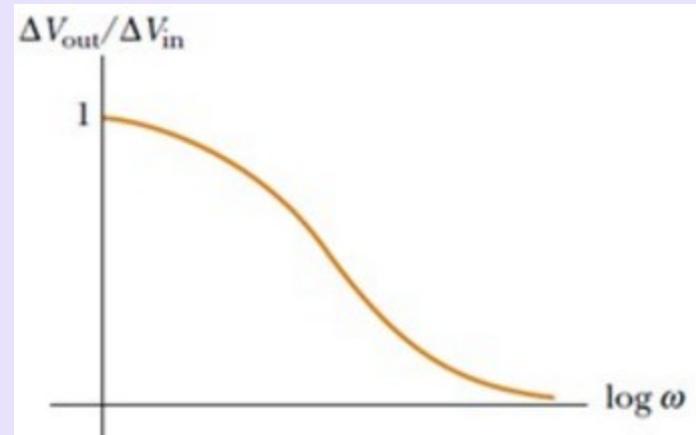


$$V_{in} = \frac{i_{rms}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

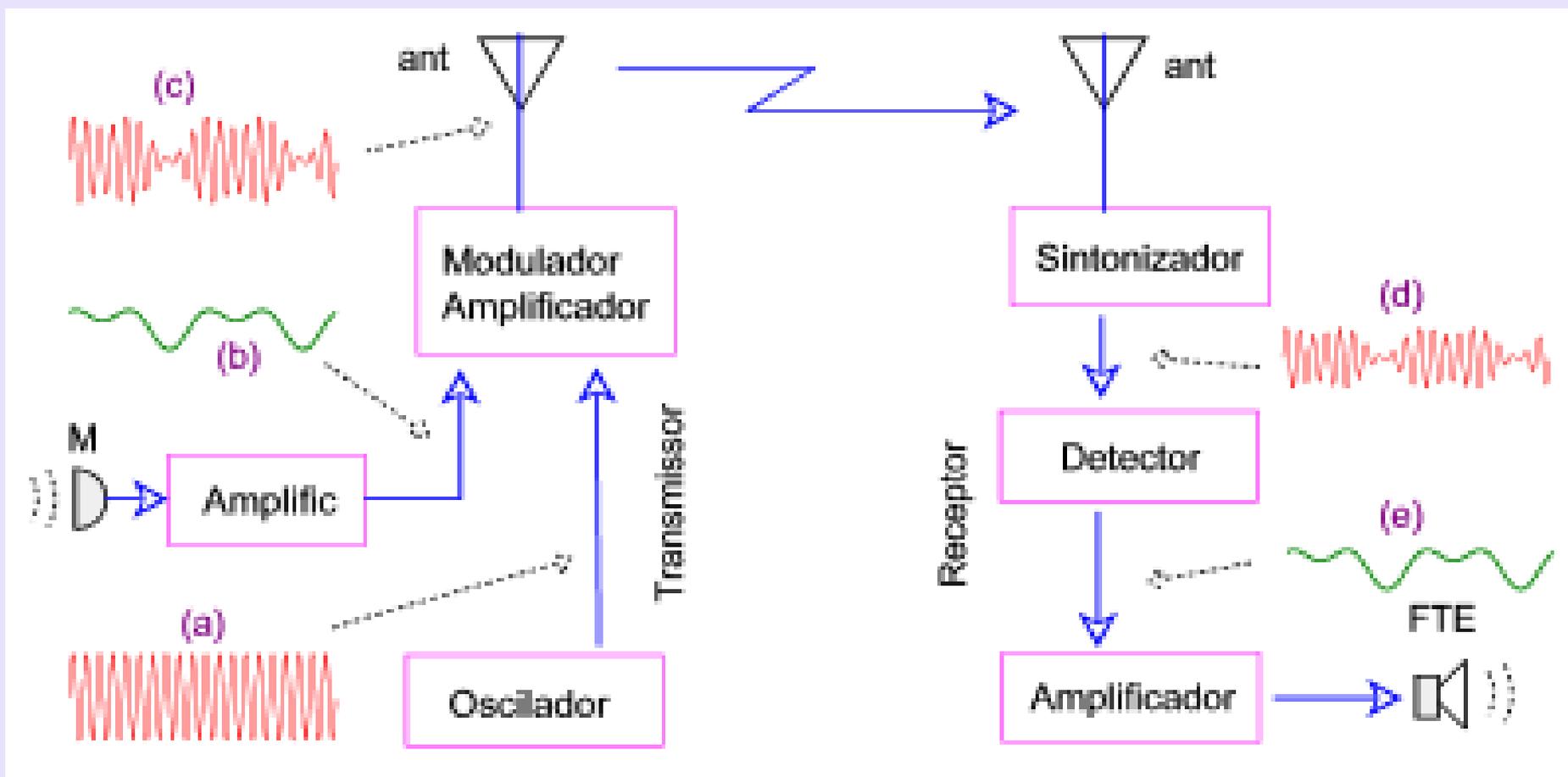
$$V_{out} = \frac{i_{rms}}{R}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{R}$$

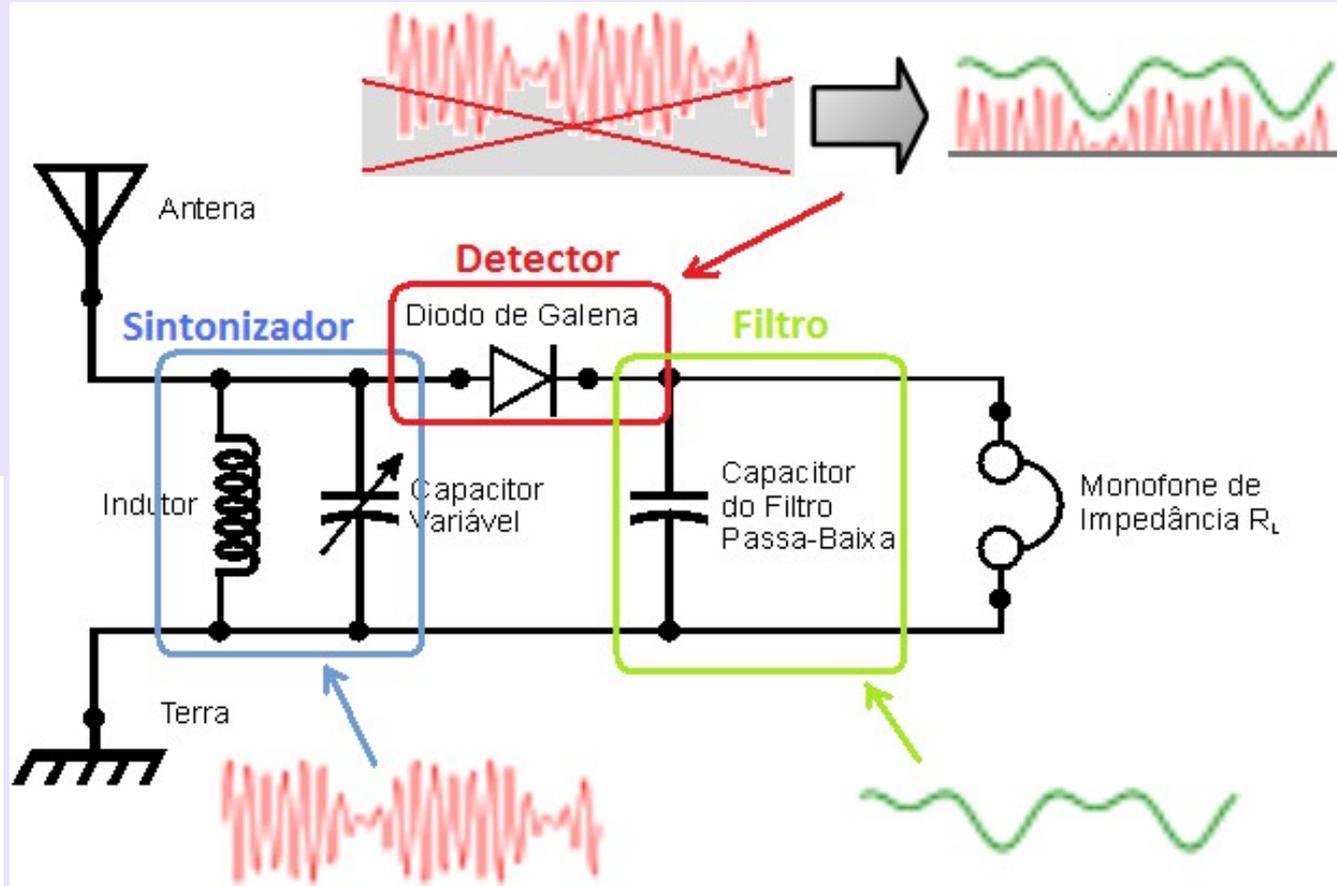
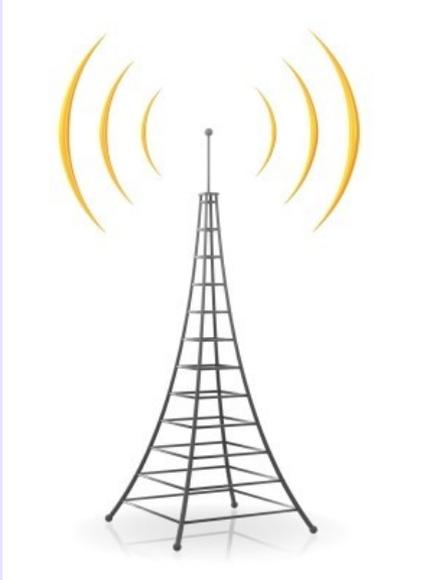
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$



Aplicação (Rádio AM)



Rádio de galena



O que é Energia Reativa?

 Nota Fiscal - Série 1 nº 001091937200501
Conta de Energia Elétrica
RE PROC. E-34/059.213/04 - DEF-03

JAN/2005

GABRIEL TORRES
CPF: [REDACTED]
CEP: [REDACTED] **RIO DE JANEIRO**

Lote	Local	Linha	Instalação	Data da Emissão	Data de Apresentação
[REDACTED]	500	[REDACTED]	[REDACTED]	12/01/2005	13/01/2005

Light SERVIÇOS DE ELETRICIDADE SA
AV. MAL. FLORIANO 148 RIO DE JANEIRO RJ CEP 20080-000
CNPJ 00.444.437/0001-46
INSC. ESTADUAL 81380.023 INSC. MUNICIPAL 00754678

ENERGIA ATIVA						ENERGIA REATIVA			
Numero Medidor	Medição Atual Data	Leitura	Medição Anterior Data	Leitura	Const Medidor	Consumo kWh	Nº Dias	Méda Diária kWh	Fator de Potência
[REDACTED]	10/01/2005	44957	09/12/2004	44584	1	368	32	11,50	

Classe: RESIDENCIAL TRIFÁSICO
Referência Bancária: [REDACTED]
Número da Fatura: [REDACTED]
Código do Cliente: [REDACTED]

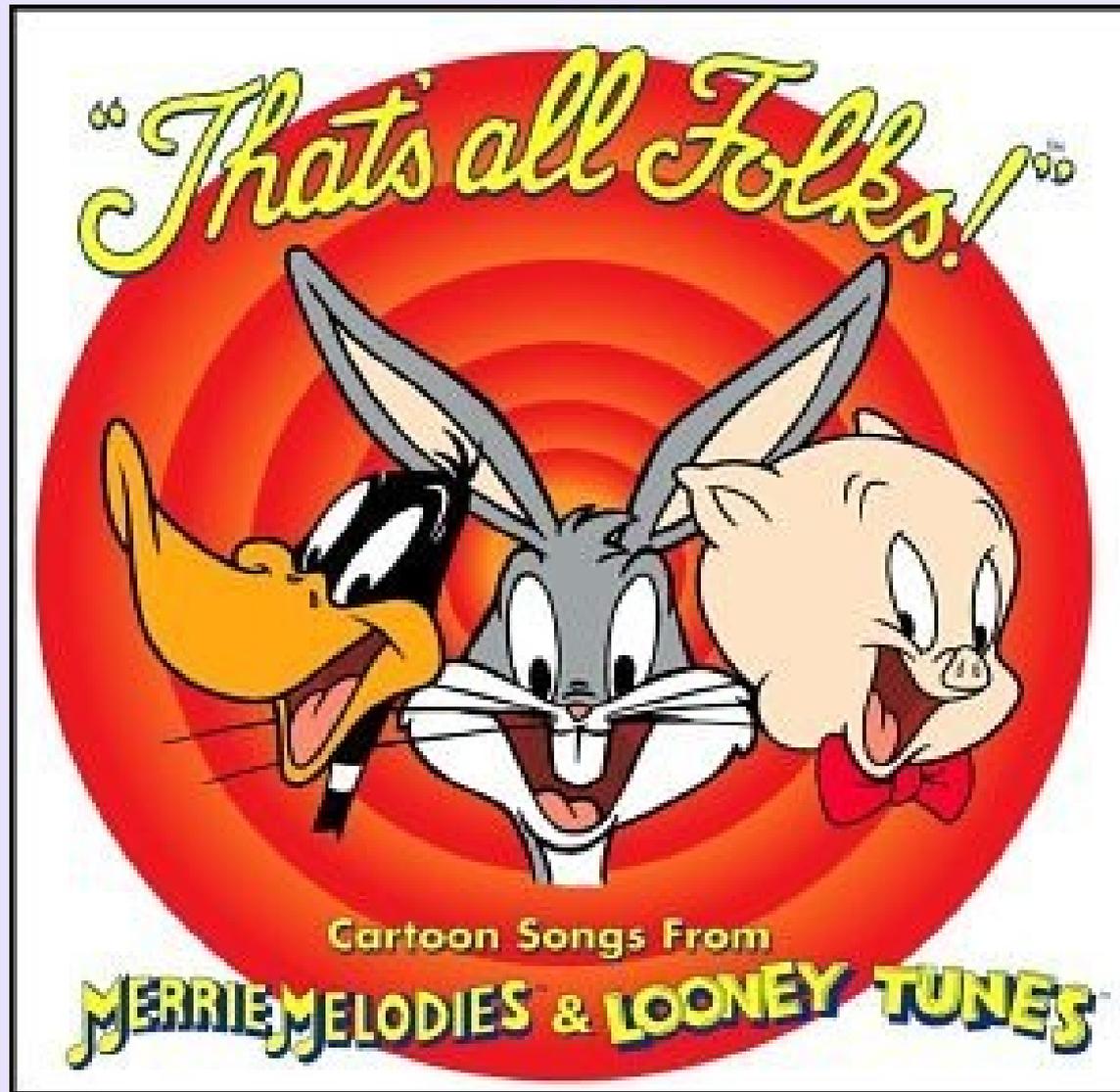
DESCRIÇÃO	CFOP	UNIDADE	QUANT.	PREÇO UNIT R\$	VALOR R\$
FORNECIMENTO DE ENERGIA ELÉTRICA	5.258	kWh	368	0,44195	162,64
ENCARGO DE CAPACIDADE ENERGICIONAL	5.258	kWh	368	0,00957	3,52

A unidade é kWh, que é unidade de potência ativa.

Em branco...



FIM



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense